سری نهم تمرین‌های ریاضی ۲

۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۷

نمونه سوال‌های امتحانی

سوال ۱ (نیم‌سال دوم ۹۰-۸۹): میدان‌برداری زیر در ناحیه $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ تعریف شده است:

$$F(x,y) = (\frac{-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2})$$

انتگرال این میدان را روی همه‌ی خم‌های بسته و ساده با جهت مثلثاتی داخل این ناحیه بدست آورید.

سوال ۲ (نیم‌سال دوم ۸۸-۸۷): فرض کنید خم $\mathcal{C}$ مرز مجموعه $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{9-x^2}\}$ باشد که بر خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است. انتگرال $\oint_{\mathcal{C}} (x^2ydx - xy^2dy)$ را یک‌بار به کمک قضیه گرین و یک بار دیگر به طور مستقیم حساب کنید.

سوال ۳ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): میدان‌برداری $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه $F(x,y) = (\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2})$ را در نظر بگیرید؛ فرض کنید $\mathcal{C}$ خم $y = x^2 - 1$ باشد که نقطه $(-1,0)$ را به نقطه $(1,0)$ وصل می‌کند. انتگرال $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ را محاسبه کنید.

سوال ۴ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): فرض کنید $F(x,y) = (y - \ln(x^2+y^2), 2\tan^{-1}(\frac{y}{x}))$. انتگرال $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ را حساب کنید که در آن $\mathcal{C}$ دایره به مرکز نقطه $(2,3)$ و به شعاع یک با جهت مثلثاتی است.

سوال ۵ (نیم‌سال اول ۹۶-۹۵): میدان هموار زیر را روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ در نظر بگیرید:

$$F(x,y) = (-yf(x,y), xf(x,y))$$

الف) نشان دهید F موضعا پایدار است اگروتنهااگر برای همه نقاط خارج از مبدا داشته باشیم:

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = -2f(x,y)$$

ب) نشان دهید اگر تابع f همگن مرتبه -2 باشد، آنگاه در رابطه بالا صدق می‌کند.

ج) اگر $f(x,y) = \frac{1}{x^2+4y^2}$، انتگرال میدان F را روی دایره واحد و در جهت مثلثاتی محاسبه کنید.
(راهنمایی: ابتدا انتگرال این میدان را روی بیضی $x^2+4y^2 = 1$ محاسبه کنید.)

سوال ۶: دو میدان برداری $F_1(x,y) = (P(x,y), 0)$ و $F_2(x,y) = (0, Q(x,y))$ و منحنی $r(t) = (\cos t, \sin t)$، $0 \le t \le 2\pi$ داده شده است. مجموع کارهای انجام‌شده میدان‌های برداری F_1 و F_2 روی منحنی r، برابر صفر است. مقدار کار انجام شده میدان برداری $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ را روی منحنی r حساب کنید.

تمرین‌های برگزیده

تمرین ۱: نشان دهید میدان برداری $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ پایستار نیست (تابع پتانسیل ندارد). سپس، مقدار $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ را بیابید که در آن $\mathcal{C}$ به صورت $x^4 + y^4 = 1$ است که خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است.

تمرین ۲: مطلوب است محاسبه

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (e^x \sin y + 3y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy$$

که در آن $\mathcal{C}$ بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ است.

تمرین ۳: مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که میدان برداری زیر پایستار باشد:

$$F(x,y,x) = (ax \ln z, by^2 z, \frac{x^2}{z} + y^3)$$

تمرین ۴: نشان دهید میدان برداری $F(x,y,z) = (2xyz, x^2 z, x^2 y)$ پایستار است و تابع پتانسیل آن‌را بدست آورید.

تمرین ۵: درستی قضیه گرین را برای انتگرال خط

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (2x^2 + 2y^2)dx + (x+y)^2 dy$$

بررسی نمایید. منحنی بسته $\mathcal{C}$ مثلثی است با راس‌های $A = (1,1)$، $B = (2,2)$ و $C = (1,3)$.

تمرین ۶: مقدار انتگرال

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (x \sin y^2 - y^2)dx + (x^2 y \cos y^2 + 3x)dy$$

را در مرز ناحیه‌ای $ABCD$ محصور با خطوط $x-y=-1$، $x-y=3$، $x+y=-1$ و $x+y=2$ و در جهت مثلثاتی حساب کنید.

تمرین ۷: نشان دهید که شرط لازم برای پایستار بودن میدان برداری $F(r,\theta) = F_r(r,\theta)\hat{r} + F_\theta(r,\theta)\hat{\theta}$ (بیان شده بر حسب مختصات قطبی) آن است که

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - r\frac{\partial F_\theta}{\partial r} = F_\theta$$

تمرین ۸: انتگرال $\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{(2y^2+1)^{3/2}}$ را که در آن $\mathcal{C}$ سهمی $x + z = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$ است، پیدا کنید.

تمرین ۹: اگر f و g میدان‌های اسکالر با مشتق‌های جزیی اول پیوسته در ناحیه همبند D باشند، نشان دهید به ازای هر منحنی هموار $\mathcal{C}$ در D از P تا Q،

$$\int_{\mathcal{C}} f \nabla g \cdot dr + \int_{\mathcal{C}} g \nabla f \cdot dr = f(Q)g(Q) - f(P)g(P).$$